

2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高二下学期期末数学试卷

一、选择题（本大题共10题，每小题4分，共计40分）

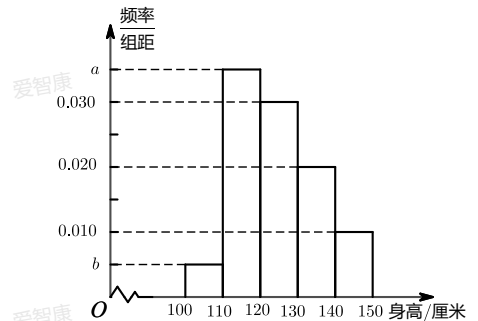
1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$ ，则 $\complement_U A = ()$.

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
C. $(-1, 1)$ D. $[-1, 1]$

2. 若命题 “存在 $x_0 \in \mathbf{R}$ ，使 $x^2 + mx + \frac{1}{4} < 0$ ” 是假命题，则实数 m 的取值范围是 $()$.

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, 0)$

3. 某地区为了解小学生的身高发育情况，从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）. 若 $a : b = 7$ ，由图中可知，身高落在 $[110, 130)$ 范围内的学生人数是 $()$.



- A. 35 B. 24 C. 46 D. 65

4. 甲、乙两人玩猜数字游戏，先由甲心中想一个数字，记为 a ，再由乙猜甲刚才所想的数字，把乙猜的数字记为 b ，其中 $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，若 $|a - b| \leq 1$ ，就称甲、乙 “心有灵犀”. 现任意找两人玩这个游戏，则他们 “心有灵犀” 的概率为 $()$.

- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{4}{9}$

5. 若 $a > 0, b > 0$ ，则 “ $ab < 1$ ” 是 “ $a < 1, b < 1$ ” 的 $()$.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$ 在 $x = 1$ 处取得极大值10，则 $\frac{b}{a}$ 的值为 $()$.

- A. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

7. 某篮球队员在比赛中每次罚球的命中率相同，且在两次罚球中至多命中一次的概率为 $\frac{16}{25}$ ，则该队员每次罚球的命中率为 $()$.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$ ， $B = \{x | |x - b| > 2, x \in \mathbf{R}\}$ ，若 $A \subseteq B$ ，则实数 a, b 必满足 $()$.

- A. $|a + b| \leq 3$ B. $|a + b| \geq 3$ C. $|a - b| \leq 3$ D. $|a - b| \geq 3$

9. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，集合 $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$ ， $B = \{3, 6, 7, 8, 9\}$ ，则 $\complement_U (A \cup B)$ 等于 $()$.

A. $\{3, 4, 5, 7\}$

B. $\{1, 2, 4, 5\}$

C. $\{1, 2, 3, 6\}$

D. $\{4, 5\}$

10. 设 a, b, c 为实数, $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$, $g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$, 记集合 $S = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{x | g(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $|S|, |T|$ 分别为集合 S, T 的元素个数, 则下列结论不可能的是 ().

A. $|S| = 1$ 且 $|T| = 0$

B. $|S| = 1$ 且 $|T| = 1$

C. $|S| = 2$ 且 $|T| = 2$

D. $|S| = 2$ 且 $|T| = 3$

二、填空题 (本大题共6题, 每小题4分, 共计24分)

11. 在区间 $(0, 4)$ 内任取一实数 t , 则 $\log_2(t-1) < 1$ 的概率是 _____ .

12. 某校高一年级有学生850人, 高二年级950人, 高三年级1400人, 现采用分层抽样抽取容量为64的一个样本, 那么在高三年级应抽取的人数为 _____ .

13. 口袋中有 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个白球, 3个红球, 依次从口袋中任取一球, 如果取到红球, 那么继续取球, 且取出的红球不放回; 如果取到白球, 就停止取球, 记取球的次数为 X , 若 $P(X=2) = \frac{7}{30}$, 则 n 的值为 _____ .

14. 设命题 p : 实数 x 满足 $|x-1| \leq a$ (其中 $a > 0$); 命题 q : 实数 x 满足 $3^{x^2-x-6} < 1$, 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

15. 某毕业生参加人才招聘会, 分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历, 假定该毕业生得到甲公司面试的概率为 $\frac{1}{2}$, 得到乙、丙公司面试的概率均为 p , 且各公司是否让其面试是相互独立的, 记 X 为该毕业生得到面试的公司个数, 若 $P(X=0) = \frac{1}{18}$, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____ .

16. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 关于 x 的不等式 $f^2(x) - af(x) > 0$ 只有一个整数解, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

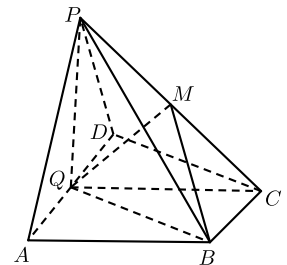
三、解答题 (本大题共3题, 共计36分)

17. 玉山一中篮球体育测试要求学生完成“立定投篮”和“三步上篮”两项测试, “立定投篮”和“三步上篮”各有2次投篮机会, 先进行“立定投篮”测试, 如果合格才能参加“三步上篮”测试. 为了节约时间, 每项测试只需且必须投中一次即为合格. 小华同学“立定投篮”的命中率为 $\frac{1}{2}$, “三步上篮”的命中率为 $\frac{2}{3}$. 假设小华不放弃任何一次投篮机会且每次投篮是否命中相互独立.

(1) 求小华同学两项测试均合格的概率.

(2) 设测试过程中小华投篮次数为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, Q 为 AD 的中点, M 是棱 PC 上的点, $PA = PD = 2$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$.



(1) 求证: 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD .

(2) 若 M 为棱 PC 的中点, 求异面直线 AP 与 BM 所成角的余弦值.

(3) 若二面角 $M-BQ-C$ 大小为 60° , 求 QM 的长.

19. 设函数 $f(x) = (x^2 - a)e^x$,
- (1) 当 $a = 3$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值 .
 - (2) 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值 .
 - (3) 若 x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个不同的极值点, 且 $|e^{x_2}f(x_1) - e^{x_1}f(x_2)| \geq 4e^{x_1+x_2}|x_1^2x_2 - x_1x_2^2|$, 若 $3f(a) < a^3 + \frac{3}{2}a^2 - 3a + b$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围 .